TEORIA BAKRY-ÉMERY-LEDOUX: KRZYWIZNA RICCIEGO A RÓWNANIE CIEPŁA

MICHAŁ MIŚKIEWICZ

1. Plan wykładu

Wychodząc od miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$ oraz funkcjonału energii Dirichleta $E(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2$, operator Laplace'a $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u$ można wyprowadzić jako operator Eulera-Lagrange'a. Oznacza to tyle, że dla dowolnej rodziny funkcji u_t zachodzi wzór

$$\partial_t E(u_t) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \partial_t \nabla u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla \partial_t u \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \, \partial_t u.$$

Powyżej, jak i w dalszej części notatek, cicho zakładam, że rozpatrywane funkcje są odpowiednio regularne i zanikają w nieskończoności na tyle szybko, by uzasadnić poprawność rachunków.

Naturalnym problemem jest potok gradientowy funkcjonału E, czyli równanie ciepła $(\partial_t - \Delta) u = 0$. Rozwiązanie z warunkiem początkowym f można wyrazić jawnym wzorem

$$(P_t f)(x) \equiv u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_t(x,y) \, \mathrm{d}y,$$

gdzie $\rho_t(x,y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x-y|^2/4t)$. Odnotujmy, że w tym przypadku $\rho_t(x,y)$ zależy wyłącznie od $x-y$, dzięki czemu $P_t f$ jest zadane przez splot i zachodzi równość $\nabla P_t f = P_t \nabla f$. Na mocy nierówności Jensena prowadzi ona do nierówności $|\nabla P_t f|^2 \leqslant P_t |\nabla f|^2$ i na oszacowaniach tego właśnie typu się teraz skupimy.

Na potrzeby tego wykładu ograniczymy się do prostego szczególnego przypadku, który stanowi dobry model dla bardziej ogólnych rozważań (o czym dalej). Rozważmy mianowicie $\mathbb{R}^n$ z miarą $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-h(x)}\,\mathrm{d}x$. Jeśli wprowadzimy jak poprzednio funkcjonał energii $E(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu$, to analogiczny rachunek prowadzi do operatora Eulera-Lagrange'a zadanego wzorem

$$Lu := \Delta u - \nabla h \nabla u.$$

Istotnie, łatwo się przekonać, że zachodzi tożsamość $\langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2(\mu)} = -\langle Lf, g \rangle_{L^2(\mu)}$; w szczególności, L jest operatorem samosprzężonym na $L^2(\mu)$. Jak poprzednio, rozważymy równanie

Date: 22 kwietnia 2023.

$(\partial_t - L)u = 0$ i przyjmiemy za dane, że rozwiązanie tego równania istnieje i jest zadane przez jądro całkowe ρ_t:

$$(P_t f)(x) \equiv u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_t(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Jako interesujące szczególne przypadki można wymienić $h \equiv 0$ (klasyczne równanie ciepła) oraz $h(x) = \frac{1}{2}|x|^2$. W tym drugim przypadku L jest operatorem Ornsteina-Uhlenbecka $Lu = \Delta u - x\nabla u$, a P_t jest półgrupą odpowiadającą procesowi Ornsteina-Uhlenbecka [Led00, eq. (1.6)]:

$$P_t f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + (1-e^{-2t})^{1/2} y) e^{-|y|^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Omówimy następujące twierdzenie wiążące dolne oszacowania na $\nabla^2 h$ z oszacowaniami na gradient rozwiązania równania ciepła. Równoważność pierwszych dwóch warunków pochodzi z pracy Bakry-Émery [BE84], od której ta teoria bierze początek. Warunek (3) został zaczerpnięty z [vRS05, Th. 2].

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\nabla^2 h(x) \geqslant K \cdot I$ *dla* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

(2) *dla* $f \in C_c^\infty$, $t > 0$

$$|\nabla P_t f(x)|^2 \leqslant e^{-2Kt} P_t |\nabla f|^2(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n;$$

(3) *dla* $f \in C_c^\infty$, $t > 0$

$$\|\nabla P_t f\|_\infty \leqslant e^{-Kt} \|\nabla f\|_\infty \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Warto od razu uprzedzić, że na rozmaitościach Riemanna analogiczne równoważności zachodzą między warunkiem $\mathrm{Ric} \geqslant K \cdot g$ na krzywiznę Ricciego a własnościami rozwiązania równania ciepła. Jest też znanych wiele innych równoważnych warunków: podobna nierówność z $|\nabla f|$ w miejsce $|\nabla f|^2$, nierówności typu Sobolewa, log-Sobolewa, Poincarégo, K-wypukłość dla funkcjonału entropii. Ich omówienie można znaleźć w pracach [vRS05, Wan04, Wan11].

2. Odniesienie do ogólniejszej teorii

Dla przejrzystości wykładu ograniczymy się od opisanego wyżej szczególnego prostego przypadku. Warto jednak wiedzieć, że idee i techniki tu zawarte są stosowalne w ogólniejszym kontekście, i to w więcej niż jednym:

- Tę teorię można rozwinąć dla ogólnych procesów Markowa z czasem ciągłym – nie tylko na $\mathbb{R}^n$, ale na dowolnej przestrzeni, np. skończonej. Szczegóły można znaleźć u Ledoux [Led00]. Mając proces Markowa X_t, jego półgrupę $P_t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$ i miarę niezmienniczą μ, wprowadza się generator $Lf := \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}$ i operator $\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}(L(fg) - fL(g) - gL(f))$ nazywany *carré du champ* oraz $\Gamma_2(f,g)\frac{1}{2}(L\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf))$ (*iterowany* *carré du champ*). Pozwala to zdefiniować dolne oszacowanie na krzywiznę K wraz z górnym ograniczeniem na wymiar n poprzez warunek [Led00, Def. 1.2]

$$\Gamma_2(f,f) \geqslant K\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}(Lf)^2.$$

W przypadku $X_t = B_{2t}$ (ruch Browna na rozmaitości, z drobną renormalizacją czasu) można się przekonać, że $L = \Delta$, $\Gamma(f,g) = \nabla f \cdot \nabla g$ oraz $\Gamma_2(f,g) = \nabla^2 f \cdot \nabla^2 g + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla g)$. Warunek powyżej jest wtedy prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ric} \geqslant K \cdot g$.

- Jak już wspomnieliśmy: rozpatrując równanie ciepła na rozmaitości Riemanna (z miarą objętości), otrzymujemy analogiczną charakteryzację dolnych ograniczeń na krzywiznę Ricciego: $\mathrm{Ric} \geqslant K \cdot g$. Ten przypadek jest na tyle klasyczny, że trudno znaleźć w literaturze rozważania poświęcone konkretnie jemu. Jednak żeby otrzymać odpowiednik Twierdzenia 1, wystarczy powtórzyć rozumowanie zarysowane poniżej, podmieniając wzór Bochnera (B) na analogiczny wzór

$$(\partial_t - \Delta)\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = -|\nabla^2 u|^2 - \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) \tag{1}$$

zachodzący dla rozwiązań równania ciepła. Człon z krzywizną pojawia się ze względu na brak przemienności pochodnych w następującym rachunku:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u, \Delta \nabla u \rangle &= \nabla^a u \nabla_b \nabla_a \nabla^b u \\
&= \nabla^a u R^b_{bac} \nabla^c u + \nabla^a u \nabla_a \nabla_b \nabla^b u \\
&= \mathrm{Ric}_{ac} \nabla^a u \nabla^c u + \nabla^a u \nabla_a \Delta u \\
&= \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle .
\end{aligned}$$

Otrzymaną równość można wyprowadzać na różne sposoby. Powyższy rachunek wykorzystuje abstrakcyjną notację indeksową Penrose'a; wyjaśnienie można znaleźć w książce Walda [Wal84, Ch. 2.4].

- Można połączyć oba przypadki, rozważając rozmaitość z metryką Riemanna oraz miarą $e^{-h}\,\mathrm{dvol}$. Jest to gładki przypadek przestrzeni metrycznej z miarą. Charakteryzacja dolnych ograniczeń na krzywiznę $\mathrm{Ric} + \nabla^2 h$ w takim przypadku można wtedy wykorzystać do *zdefiniowania* dolnych ograniczeń na krzywiznę Ricciego dla dowolnych (niegładkich) przestrzeni metrycznych z miarą. Robi to np. Naber [Nab13].

- Naber [Nab13] wyprowadził charakteryzację obustronnych ograniczeń na krzywiznę Ricciego, czyli $|\mathrm{Ric}| \leqslant K$, utrzymaną w podobnych duchu, choć technicznie dużo bardziej złożoną. W dużym uproszczeniu, główną zmianą jest zmiana dziedziny funkcji: zamiast $f\colon M \to \mathbb{R}$ określonej na rozmaitości M rozważamy funkcję $F\colon P(M) \to \mathbb{R}$ na jej przestrzeni ścieżek $P(M) = C^0([0,\infty) \times M, \mathbb{R})$ (co jest przestrzenią mierzalną nieskończonego wymiaru).

Równoważny ograniczeniu $|\operatorname{Ric}| \leqslant K$ okazuje się m.in. warunek [Nab13, eq. (19)]

$$|\nabla \mathbb{E}_x F|^2 \leqslant e^{Kt/2}\, \mathbb{E}_x \left(|\nabla_0 F|^2 + \int_0^\infty \tfrac{K}{2} e^{Ks/2} |\nabla_s F|^2 \,\mathrm{d}s \right) \quad \text{dla } x \in M,$$

gdzie $\mathbb{E}_x$ oznacza wartość oczekiwaną względem miary Wienera. Symbolem $\nabla_s F$ określamy równoległy gradient (*parallel gradient*); dla każdego $s \geqslant 0$ jest to skończenie wymiarowy wektor (można go utożsamić z elementem $T_x M$) odpowiadający pochodnej kierunkowej F w punkcie $\gamma \in P(M)$ i kierunku $V \in C^0(\gamma^* TM)$. Żądamy, by $V(t) = 0$ dla $t < s$, $|V(s)| = 1$ oraz by pole V było równoległe wzdłuż γ. Ten ostatni warunek wymaga rozważania stochastycznej wersji przeniesienia równoległego; jako dobry wstęp do tej tematyki może posłużyć książka Hsu [Hsu02].

Na zakończenie tych rozważań zwróćmy uwagę na dwa interesujące szczególne przypadki. Dla $K = 0$ otrzymujemy charakteryzację przestrzeni Ricci-płaskich (tj. spełniających $\operatorname{Ric} \equiv 0$) poprzez

$$|\nabla \mathbb{E}_x F|^2 \leqslant e^{Kt/2}\, \mathbb{E}_x |\nabla_0 F|^2.$$

Warunek charakteryzujący $|\operatorname{Ric}| \leqslant K$ można też zapisać dla najprostszych funkcji $F \colon P(M) \to \mathbb{R}$, czyli funkcji postaci $F(\gamma) = f(\gamma(t))$ dla ustalonego $t > 0$ i $f \colon M \to \mathbb{R}$ (taka funkcja z całej informacji o trajektorii wykorzystuje jedynie położenie w chwili t). Daje to nierówność [Nab13, Th. 6.6]

$$|\nabla \mathbb{E}_x f(B_t)|^2 \leqslant e^{Kt/2}\, \mathbb{E}_x \left(|\nabla f(B_t)|^2 + \int_0^t \tfrac{K}{2} e^{Ks/2} |\nabla f(B_t)|^2 \,\mathrm{d}s \right),$$

czyli dokładnie nierówność z Twierdzenia 1 charakteryzującego $\operatorname{Ric} \geqslant -K \cdot g$ (należy zwrócić uwagę, że tutaj rozważanym operatorem jest $\frac{1}{2}\Delta$).

3. Szkic dowodu

Dla u będącego rozwiązaniem $(\partial_t - L)u$ wyznaczamy $(\partial_t - L)(\frac{1}{2}|\nabla u|^2)$. Otrzymany wzór nosi nazwę wzoru Bochnera (przynajmniej w przypadku rozmaitości, zob. (1)):

$$(\partial_t - L)\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = -|\nabla^2 u|^2 - \nabla^2 h(\nabla u, \nabla u). \tag{B}$$

Pominiemy tutaj bezpośredni rachunek prowadzący do tej równości.

($1 \Rightarrow 2$) Jeśli przyjmiemy, że $\nabla^2 h \geqslant K \cdot I$, to wzór Bochnera (B) daje nam

$$(\partial_t - L)\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) \leqslant -K|\nabla u|^2.$$

Innymi słowy, funkcja $g := e^{-2Kt}|\nabla u|^2$ spełnia $(\partial_t - L)g \leqslant 0$. Pozostaje skorzystać ze wzoru Duhamela

$$\partial_t \left(P_{s-t} g_t\right)(x) = P_{s-t}[(\partial_t - L)g_t](x).$$

Dowód ponownie opiera się na bezpośrednim rachunku; wymaga skorzystania z faktu, że $\rho_t(x, y)$ spełnia równanie ciepła względem L, a następnie zastosowania całkowania przez części. Z połączenia dotychczasowej wiedzy wynika, że

$$\partial_t \left(P_{s-t} e^{2Kt} |\nabla u_t|^2 \right)(y) \leqslant 0.$$

Możemy więc wywnioskować, że wartość powyższej funkcji w chwili $t = s$ (czyli $e^{2Ks}|\nabla u_s|^2(x)$) jest niewiększa niż ta w chwili $t = 0$ (czyli $P_s|\nabla u_0|^2(x)$). I to dokładnie jest warunek (2), tylko inaczej zapisany (należy pamiętać, że $u_t = P_t u_0$).

($2 \Rightarrow 3$) To wynikanie jest proste, gdyż warunek (3) jest istotnie słabszy niż (2) – wszak (2) jest nierównością punktową, a (3) globalną. Z faktu, że ρ_t jest miarą probabilistyczną, wynika, że wielkość $P_t|\nabla f|^2(x)$ jest oszacowana przez $\|\nabla f\|_\infty$, a więc

$$|\nabla P_t f(x)|^2 \leqslant e^{-2Kt} P_t |\nabla f|^2(x) \leqslant e^{-2Kt} \|\nabla f\|_\infty^2.$$

Wzięcie supremum po lewej stronie prowadzi do (3).

($2 \Rightarrow 1$) Nierówność $|\nabla u_t|^2(y) \leqslant e^{-2Kt} P_t |\nabla u_0|^2(y)$ jest równością w chwili $t = 0$, więc możemy ją *zróżniczkować*, to znaczy rozważyć granicę

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{1}{t} \left(P_t |\nabla u_0|^2 - e^{2Kt} |\nabla u_t|^2 \right) \\ &= L|\nabla u|^2 - 2K|\nabla u|^2 - \partial_t |\nabla u|^2 && \text{(w chwili } t = 0) \\ &= 2(|\nabla^2 u_0|^2 + \nabla^2 h(\nabla u_0, \nabla u_0) - K|\nabla u_0|^2). && \text{(na mocy (B))} \end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że $\nabla^2 h(v, v) = K - \varepsilon$ w pewnym punkcie $x \in M$ i dla pewnego wektora jednostkowego v. Możemy wtedy dobrać funkcję u_0, dla której w tym punkcie mamy $\nabla u(x) = v$ oraz $\nabla^2 u(x) = 0$. Otrzymana wyżej nierówność w punkcie x daje $0 \geqslant -2\varepsilon$, co prowadzi do sprzeczności.

Dowód ($3 \Rightarrow 1$) przebiega podobnie, ale wymaga większej uwagi przy konstrukcji funkcji testowej u_0. Należy upewnić się, że $|\nabla u_0| \equiv 1$ i $|\nabla^2 u_0| \equiv 0$ na pewnym otoczeniu x, jak również $|\nabla u_0| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{10}$ na $\mathbb{R}^n$. Szczegóły można znaleźć w [vRS05, Sec. 3], choć niestety też nie wszystkie.

Literatura

[BE84] Dominique Bakry and Michel Émery. Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(15):775–778, 1984.

[Hsu02] Elton P. Hsu. *Stochastic analysis on manifolds*, volume 38 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Led00] Michel Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. volume 9, pages 305–366. 2000. Probability theory.

[Nab13] Aaron Naber. Characterizations of bounded ricci curvature on smooth and NonSmooth spaces. *arXiv preprint arXiv:1306.6512*, Jun 2013.

[vRS05] Max-K. von Renesse and Karl-Theodor Sturm. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(7):923–940, 2005.

[Wal84] Robert M. Wald. *General relativity.* University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.

[Wan04] Feng-Yu Wang. Equivalence of dimension-free Harnack inequality and curvature condition. *Integral Equations Operator Theory*, 48(4):547–552, 2004.

[Wan11] Feng-Yu Wang. Equivalent semigroup properties for the curvature-dimension condition. *Bull. Sci. Math.*, 135(6-7):803–815, 2011.